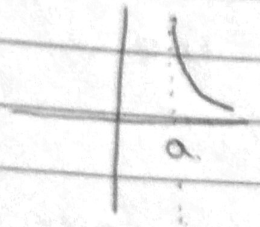
16/01/2017

f'	+	+	−	−
f''	+	−	−	+
f	αύξουσα και κυρτή	αύξουσα και κοίλη	φθίνουσα και κοίλη	φθίνουσα και κυρτή

Ορ.

Λέμε ότι η ευθεία $x=\alpha$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη (της γραφικής παράστασης) της f αν $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=+\infty$ ή $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x)=+\infty$

ή $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x)=-\infty$ ή $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=-\infty$.



Ορ.

Λέμε ότι η ευθεία $y=\beta$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη (της γραφικής παράστασης) της f στο $+\infty$ αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\beta$

Ορ.

Λέμε ότι η ευθεία $y=\beta$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη (της γραφικής παράστασης) της f στο $-\infty$ αν $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\beta$

Ορ

Η ευθεία $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ είναι

α) πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$
αν $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$

β) Πλάγια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$
αν $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$

Πως εξετάζουμε αν η f έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$;

→ Βρίσκουμε (αν υπάρχει) το όριο $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

→ Αν το όριο αυτό είναι $b \in \mathbb{R}$ τότε η $y = b$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

→ Αν το παραπάνω όριο υπάρχει και ισούται με $+\infty$ ή $-\infty$
εξετάζουμε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Αν το όριο αυτό υπάρχει και είναι ίσο με $a \in \mathbb{R}$
Τότε εξετάζουμε αν υπάρχει το όριο
$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$

Αν το όριο αυτό είναι ίσο με $b \in \mathbb{R}$
τότε η $y = ax + b$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+$

Ομοίως στο $-\infty$

Άσκηση

Να μελετηθεί η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ και να σχεδιαστεί η γρ. παραστασ.

Απ

Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$f'(x)=0 \iff x=0$

$f'(x)>0 \iff x<0$

$f'(x)<0 \iff x>0$

$$f''(x) = \frac{(-2x)'(1+x^2)^2-(-2x)\left((1+x^2)^2\right)'}{\left((1+x^2)^2\right)^2}$$

$$= \frac{-2(1+x^2)^2+2x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{-2(1+x^2)+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$$= \frac{6\left(x^2-\frac{1}{3}\right)}{(1+x^2)^3} = \frac{6\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{(1+x^2)^3}$$

$f''(x)=0$

$\iff x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$f''(x)<0 \iff x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$f''(x)>0 \iff x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$

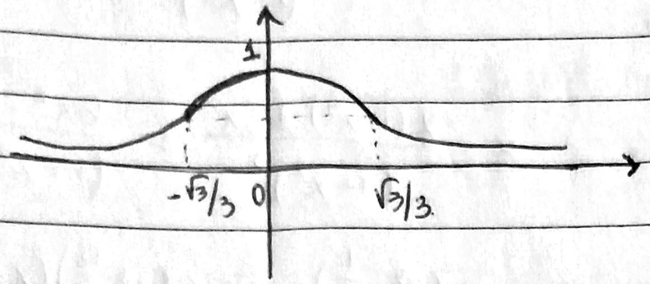
x		$-\sqrt{3}/3$		0		$\sqrt{3}/3$	
f'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
f''	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$

Η f παρουσιάζει μέγιστο (και μάλιστα ολικό) στο σημείο 0 με τιμή $f(0)=1$ και παρουσιάζει σημεία καμπής στο $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Εφόσον $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Εφόσον $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$



Άσκηση

Να μελετηθεί και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \frac{\log x}{x}$

Απ

Π.Ο. $A = (0, +\infty)$

παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \iff 1 - \log x = 0 \iff x = e$

$f'(x) > 0 \iff 1 - \log x > 0 \iff \log x < 1 \iff 0 < x < e$

$f'(x) < 0 \iff x > e$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - (1-\log x)2x}{x^4} = \frac{-x-(1-\log x)2x}{x^4}$$

$$= \frac{-1-2(1-\log x)}{x^3} = \frac{-3+2\log x}{x^3}$$

$f''(x)=0 \iff \log x = \frac{3}{2} \iff x = e^{3/2}$

$f''(x) > 0 \iff 2\log x - 3 > 0 \iff \log x > \frac{3}{2} \iff x > e^{3/2}$

$f''(x) < 0 \iff 0 < x < e^{3/2}$

	0		e		$e^{3/2}$	
f'		$+$	0	$-$		$-$
f''		$-$		$-$	0	$+$
f		↗		↘		↘

f γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$
f γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$
Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο e με τιμή
$f(e) = \frac{1}{e}$

Η f είναι κοίλη στο $(0, e^{3/2}]$ και κυρτή $[e^{3/2}, +\infty)$

Στο $e^{3/2}$ έχει σημείο καμπής

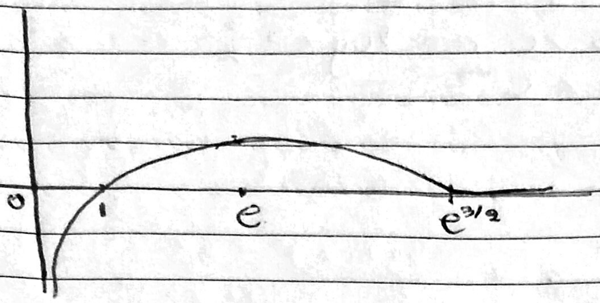
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{x} = -\infty$$

$$\left(\text{διότι } \lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty \text{ και } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \right)$$

Συνεπώς η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γρ.παρ. της f

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ (όπως εύκολα βλέπαμε με De L'H).

Άρα η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γρ. παρ. της f στο $+\infty$.



Να συγκριθούν οι αριθμοί e^{π}, π^{e}

$e^{\pi} > \pi^{e}$

$\Longleftrightarrow \log e^{\pi} > \log \pi^{e}$

επειδή η συνάρτηση log είναι γνησίως αύξουσα

$\Longleftrightarrow \pi > e \log \pi$

$\Longleftrightarrow \frac{\log \pi}{\pi} < \frac{1}{e} \Longleftrightarrow f(\pi) < \frac{1}{e}$ που ισχύει.

Άσκηση

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(a)=1=f(b)$ και f δυο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b) με $f''(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$
Να δ.ο. $f(x) \neq 1$ $\forall x \in (a,b)$

Αποδ.

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f(x_0)=1$

Η f είναι συνεχής στο $[a,x_0]$ παραγ. στο (a,x_0)
$f(a)=1=f(x_0)$ άρα από Θ. Rolle
$\exists\, \xi_1 \in (a,x_0)$ με $f'(\xi_1)=0$

f συνεχής στο $[x_0,b]$ παραγ στο (x_0,b)
$f(x_0)=1=f(b)$ Από το Θ. Rolle $\exists\, \xi_2 \in (x_0,b)$
$f'(\xi_2)=0$

f' συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$
f' παραγ στο (ξ_1,ξ_2)
$f'(\xi_1)=0=f'(\xi_2)$. Από το Θ. Rolle $\exists\, \xi_3 (\xi_1,\xi_2) \subseteq (a,b)$
με $f''(\xi_3)=0$
άτοπο διότι $f''(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$
Επομένως $f(x) \neq 1$ $\forall x \in (a,b)$.

Άσκηση

$f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ $\rho \in (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$
Ορίζουμε $g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \dfrac{f(x)}{x-\rho}$

α) Να δ.ο. $\exists\, \xi \in (\alpha, \beta)$ με $g'(\xi) = 0$

β) Για ξ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του α) να δ.ο. η εφαπτομένη ευθεία της γρ. παρ. της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από το σημείο $(\rho, 0)$.

Απ.

α) Η g είναι παραγ. στο $[\alpha, \beta]$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων

με $g'(x) = \dfrac{f'(x)(x-\rho) - f(x)}{(x-\rho)^2}$

g συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
g παραγ. στο (α, β)

$g(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha - \rho} = \dfrac{0}{\alpha-\rho} = 0$

$g(\beta) = \cdot \quad \cdot \quad \cdot = 0$

Από Θ. Rolle $\exists\, \xi \in (\alpha, \beta)$ με $g'(\xi) = 0$

β) Εφόσον το ξ ικανοποιεί το συμπέρασμα του α)
έχουμε $g'(\xi) = 0$

$\Rightarrow f'(\xi)(\xi - \rho) - f(\xi) = 0 \quad (1)$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$

έχει εξίσωση $y - f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi)$ (2)

Επομένως από την (1) έχουμε $f'(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{\xi-\rho}$

Η εξίσωση της ευθείας (2) γράφεται $y - f(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{\xi-\rho}(x-\xi)$

Η ευθεία αυτή για $x=\rho$ δίνει

$y = f(\xi) + \dfrac{f(\xi)}{\xi-\rho}(\rho-\xi) = f(\xi) - f(\xi) = 0$ άρα η ευθεία

διέρχεται από το σημείο $(\rho, 0)$